О ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКЕ ПЕРМАНЕНТОВ

Д.Б. Ефимов

Отдел математики Коми НЦ РАН, Чернова 3а, 167000 Сыктывкар, Россия dmefim@mail.ru

Вычисление перманентов имеет большую алгоритмическую сложность. Поэтому актуальной является задача их оценки. В данной работе мы рассматриваем верхние оценки перманентов произвольных вещественных матриц третьего порядка, опираясь на подход, предложенный Юркатом и Райзером в [1].

Определение 1. Алгеброй Пименова с n образующими назовем ассоциативную алгебру $P_n(\iota)$, порожденную над полем вещественных чисел единицей и элементами ι_k, $k = 1, \dots, n$, связанными определяющими соотношениями: $\iota_k^2 = 0$, $\iota_k\iota_l = \iota_l\iota_k$, $k, l = 1, \dots, n$.

Из определения следует, что алгебра $P_n(\iota)$ является конечномерной размерности 2^n, коммутативной, обладает единицей, и каждый ее элемент однозначно представляется в следующем стандартном виде:

$$a = a_0 + \sum_{t=1}^{n} \sum_{k_1<\dots<k_t} a_{k_1\dots k_t}\iota_{k_1}\dots\iota_{k_t}, \quad a_0, a_{k_1\dots k_t} \in R.$$

Зафиксируем в алгебре $P_1(\iota)$ основной базис $\{1, \iota\}$. Тогда регулярному модулю $P_1(\iota)$ соответствует следующее двумерное матричное регулярное представление:

$$T : a_0 + \iota a_1 \to \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

В общем случае справедливо следущее утверждение.

Утверждение 1. *Если в алгебре $P_n(\iota)$ зафиксировать основной упорядоченный базис $\{1, \iota_1, \iota_2, \dots, \iota_1\iota_2\dots\iota_n\}$, то регулярному модулю $P_n(\iota)$ соответствует матричное представление, сопоставляющее каждому элементу $a \in P_n(\iota)$ $2^n \times 2^n$-матрицу $T(a)$, являющуюся нижнетреугольной, симметричной относительно второстепенной диагонали и с элементами a_0 на главной диагонали. Коэффициент $a_{k_1k_2\dots k_t}$ при мономе $\iota_{k_1}\iota_{k_2}\dots\iota_{k_t}$ входит в данное представление в качестве элемента ровно 2^{n-t} раз. В частности, коэффициент $a_{12\dots n}$ встречается ровно один раз и находится в нижнем левом углу матрицы $T(a)$.*

Нетрудно видеть, что $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, поэтому данное матричное представление является точным, и алгебру $P_n(\iota)$ можно рассматривать как алгебру $2^n \times 2^n$ нижнетреугольных вещественных матриц специального вида.

Утверждение 2. *Рассмотрим 8×8 матрицу $T(a)$, где $a = \sum_{k=1}^{3} a_k\iota_k$ — однородный элемент первой степени в алгебре $P_3(\iota)$. Обозначим $|a| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} a_k^2}$. Тогда справедливы следующие утверждения: 1) Если хотя бы один коэффициент a_k равен нулю, то максимальное сингулярное число матрицы $T(a)$ равно $|a|$; 2) Если все коэффициенты a_k не равны нулю, то максимальное сингулярное число матрицы $T(a)$ находится в промежутке $(|a|, 2|a|/\sqrt{3})$.*

Хорошо известна связь между алгеброй Грассмана и функцией определителя (см., например, [2]). Аналогичная связь существует между алгеброй Пименова и функцией перманента ([3], стр. 110). Опишем ее более подробно. В алгебре $P_n(\iota)$ рассмотрим m $(m \le n)$ однородных элементов первой степени $a_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\iota_k$, $i = 1, \dots, m$. Через $A = (a_{ij})$ обозначим прямоугольную $m \times n$ матрицу, образованную коэффициентами элементов a_i. Обозначим через $A_{k_1\dots k_m}$ матрицу, которую образуют столбцы с номерами $k_1 < k_2 < \dots < k_m$ матрицы A. Тогда нетрудно видеть, что

$$a_1a_2\dots a_m = \sum_{k_1<\dots<k_m} \operatorname{per}(A_{k_1\dots k_m})\iota_{k_1}\dots\iota_{k_m},$$

где $\operatorname{per}(A_{k_1\dots k_m})$ означает перманент матрицы $A_{k_1\dots k_m}$. В частности, если $m = n$, то

$$a_1 a_2 \dots a_n = \operatorname{per}(A)\iota_1\iota_2\dots\iota_n. \tag{1}$$

Далее рассмотрим схему, предложенную Юркатом и Райзером в [1]. Перейдем в формуле (1) от элементов алгебры Пименова к некоторому их матричному представлению. В отличии от [1] мы будем рассматривать матричное регулярное представление:

$$T(a_1)T(a_2)\dots T(a_n) = T(\operatorname{per}(A)\iota_1\iota_2\dots\iota_n). \tag{2}$$

Из утверждения 1 следует, что матрица в правой части равенства (2) представляет собой $2^n \times 2^n$ матрицу, у которой в левом нижнем углу стоит элемент $\operatorname{per}(A)$, а все остальные элементы равны 0:

$$T(a_1)T(a_2)\dots T(a_n) = \operatorname{per}(A)E_{2^n,1}.$$

Тогда применяя к данному равенству любую матричную норму $||\cdot||$, для которой $||E_{2^n,1}|| \geq 1$, получаем неравенство

$$|\operatorname{per}(A)| \leq ||T(a_1)||||T(a_2)||\dots||T(a_n)||, \tag{3}$$

позволяющее оценить перманент матрицы сверху.

Применим к неравенству (3) спектральную норму $||\cdot||_s$. Для произвольной вещественной матрицы A она равна ее максимальному сингулярному числу, т.е. корню из максимального собственного числа матрицы A^TA. Как следует из утверждения 2, в случае $n = 3$ $||T(a_i)||_s \leq \frac{2}{\sqrt{3}}|a_i|$. Отсюда получаем следующую оценку для перманента произвольной вещественной матрицы 3-го порядка:

$$|\operatorname{per}(A)| \leq \frac{8}{3\sqrt{3}}|a_1||a_2||a_3|. \tag{4}$$

Если одна из компонент элемента a_i равна 0, то как следует из утверждения 2, $||T(a_i)||_s = |a_i|$. Отсюда, с учетом того, что перманент матрицы не меняется при перестановке строк и столбцов получаем, что для перманента произвольной вещественной 3×3 матрицы, среди элементов которой есть хотя бы один нулевой, выполняется следующее неравенство

$$|\operatorname{per}(A)| \leq \frac{4}{3}|a_1||a_2||a_3|. \tag{5}$$

Во многих случаях оценки (4), (5) дают лучший результат, чем оценки, приведенные в [3], стр. 116-117, хотя и не сравнимы с ними. Учитывая специальный вид матриц $T(a)$, $a \in P_n(\iota)$, можно попытаться доказать утверждение, аналогичное утверждению 2, и в случае произвольного n, и, следовательно, получить оценки, аналогичные формулам (4), (5), для вещественных квадратных матриц произвольного порядка.

Литература

1. Jurkat W. B., Ryser H. J. *Matrix factorizations of determinants and permanents* // Journal of Algebra. 1966. V. 3. P. 1–27.

2. Browne J. *Grassmann Algebra.* Melbourne, Australia: Quantica Publishing, 2009.

3. Минк Х. *Перманенты.* М.: Мир, 1982.